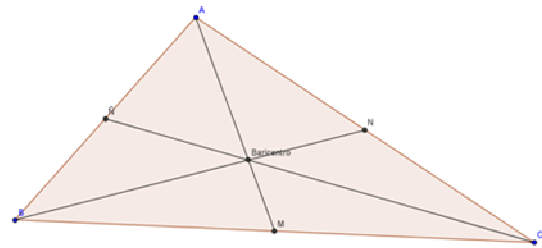


mediana

¿Estadística o

Geometría?



Carlos M^a González Martínez

Lucía Tarifa Lara

Colegio El Carmelo de Granada

Tutor: Rafael Ramírez Uclés

Índice

INTRODUCCIÓN

OBJETIVOS

Fase 1: Concepto de mediana

Fase 2: Aproximación a los centros geográficos

CENTRO GEOGRÁFICO

Nuestra aproximación para el cálculo de los centros geográficos

Muestreo equilibrado

Pasos previos: Aproximación al “centro” de Andalucía utilizando Geogebra

Experimento 1: Aproximación al “centro” de la España Peninsular utilizando Geogebra

Experimento 2: Aproximación al “centro” de la España Peninsular utilizando Geogebra con un nuevo muestreo en el contorno

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS: DATOS UTILIZADOS

INTRODUCCIÓN

Hemos elegido este título para nuestro trabajo porque fue la pregunta inicial que lo motivó. Queríamos entender la relación entre la mediana en estadística y la mediana en geometría. Habíamos estudiado estos conceptos en unidades didácticas distintas y, en un principio, no nos parecía evidente ninguna relación.

La respuesta encontrada nos permitió conectar dos ramas de las matemáticas aparentemente lejanas, al menos para nosotros. Además, nuestra investigación nos llevó a cuestionarnos la aplicación de los resultados obtenidos al cálculo del centro geográfico de una región, por lo que extendimos nuestro proyecto a la asignatura de Geografía. El hecho de conectar temas y asignaturas diferentes nos ha aportado una comprensión del concepto de mediana que va más allá del simple cálculo estadístico o geométrico.

OBJETIVOS

Para emprender nuestra investigación marcamos nuestros objetivos:

- Relacionar el concepto de mediana en geometría y en estadística
- Aplicar la relación obtenida al cálculo de centros geográficos.

Para dar respuesta a los objetivos hemos dividido nuestro trabajo en varias fases:

Fase 1: Concepto de mediana

En esta fase queremos relacionar la definición de mediana en estadística y en geometría.

En estadística, la mediana está definida para una variable unidimensional y se define como el valor central de un conjunto de valores ordenados. De acuerdo con esta definición el conjunto de datos menores o iguales que la mediana representarán el 50% de los datos, y

los que sean mayores que la mediana representarán el otro 50% del total de datos. Por ejemplo, la mediana de los datos 1, 2, 5, 7 y 9 es el valor 5, que ocupa el valor central (Figura 1).

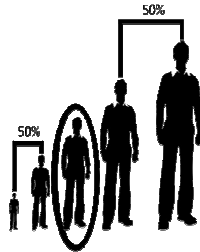


Figura 1: Mediana como valor central

En geometría, en el caso de un triángulo, la mediana es el segmento que une un vértice con el punto *medio* del lado opuesto. Buscando la relación con dividir en partes iguales, podemos comprobar que la mediana es una recta que divide al triángulo en dos partes de igual área.

Veamos el siguiente ejemplo realizado con Geogebra (Figura 2).

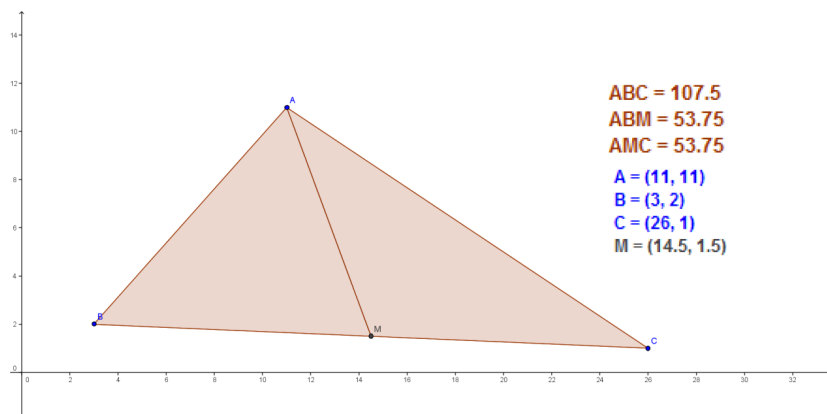


Figura 2: Mediana de un triángulo

La mediana divide al triángulo ABC en dos triángulos de igual área, midiendo cada uno de ellos la mitad del original. ¿Por qué esto es así?

El área de un triángulo es igual al producto de la base por la altura, todo ello dividido por 2. Cada uno de los triángulos obtenidos al trazar la mediana tiene la misma altura que el triángulo original, pero la mitad de base, puesto que la mediana une el vértice con el punto medio del lado opuesto. Es decir, los dos triángulos tienen la misma base y altura, su área

es por tanto igual, y la base de cada uno de ellos es la mitad de la base del triángulo primero, luego el área se ve reducida a la mitad (Figura 3).

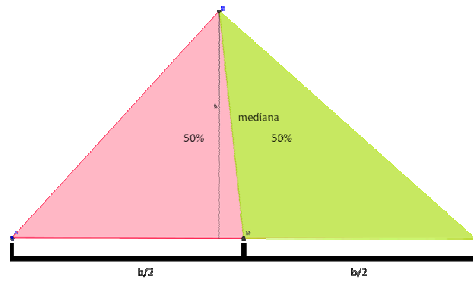


Figura 3: División de un triángulo en dos partes de igual área

Llegados a este punto, podríamos pensar que una primera relación existente entre la mediana en estadística (en una variable) y la mediana en geometría (en el plano) es que la primera divide al conjunto de datos estadísticos ordenados en dos partes, cada una de las cuales tiene el mismo número de valores, mientras que la segunda divide al polígono en dos partes de área igual.

Es decir, en una dimensión la mediana en estadística nos aporta un valor central. Trasladar el concepto de mediana a dos dimensiones nos planteó la siguiente pregunta: ¿Cómo localizar el *valor central* de un conjunto de puntos del plano?

Una primera idea que se nos ocurrió fue calcular la mediana en cada una de las coordenadas de los puntos del plano. Una segunda idea fue relacionarlo con la geometría, teniendo en cuenta que las medianas de un triángulo se cortan en el baricentro, que es el centro de gravedad de un triángulo.

Veamos por qué desechamos la primera idea y nos centramos en la segunda mediante un ejemplo. Consideremos los puntos del plano A, B, C, D, E y F (Figura 4).

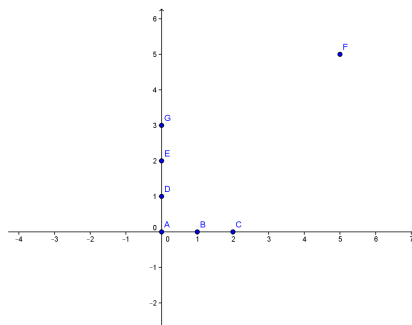


Figura 4: Ejemplo para el cálculo de la mediana en cada coordenada para un conjunto de puntos.

Las primeras coordenadas serían 0,0,0,0,1,2,5. Mediana 0

Las segundas coordenadas serían 0,0,0,1,2,3,5. Mediana 1

Luego el punto (mediana de x, mediana de y) es el punto B(0,1). ¿Es ese el valor central?
¿Qué significa dividir al conjunto de puntos en dos “partes iguales”?

Para compararlo con nuestra segunda idea, calculamos tanto el punto (Mediana de x, Mediana de y) como el baricentro de un triángulo ABC utilizando Geogebra:

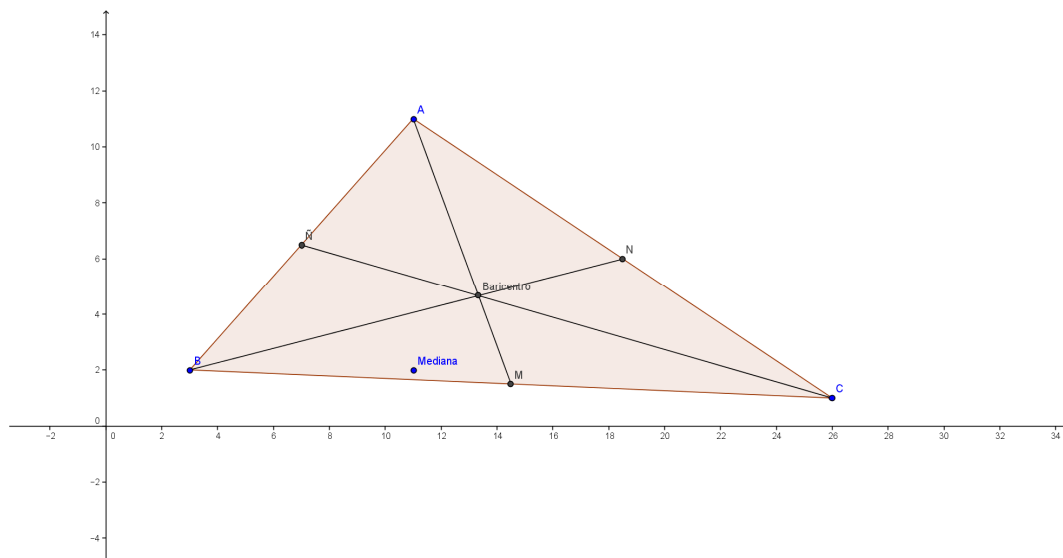


Figura 5: Comparación del Baricentro con el punto (Mediana de X, Mediana de Y)

En este ejemplo se ve claramente la diferencia entre el baricentro y el punto (Mediana de X, Mediana de Y). El primero representa el centro de gravedad mientras que el segundo está bastante desplazado del mismo y viene determinado por la coordenada x del punto A (valor central en el eje x) y la coordenada y del punto B (valor central en el eje y). Por lo tanto desechamos nuestra primera idea y pasamos a investigar qué medida estadística es la que nos localiza el baricentro de un conjunto de puntos. Para ello estudiamos algunas propiedades del baricentro.

Volvamos a la geometría:

El baricentro de cualquier polígono se puede calcular sumando las coordenadas X e Y de cada uno de los vértices y dividiendo por el número total de vértices. En el caso del triángulo anterior, la fórmula para calcular el baricentro sería la siguiente:

$$O \text{ (BARICENTRO)} = [(A_1+B_1+C_1)/3, (A_2+B_2+C_2)/3].$$

Es decir, el baricentro es, en realidad, el punto (media de X, media de Y), o punto medio, pues es un punto que resulta de hacer la media aritmética de las coordenadas de los vértices.

El baricentro cumple una curiosa propiedad. Por ser el centro de gravedad de la figura la suma de los vectores que tienen origen el baricentro y vértice cada uno de los vértices de la figura es 0. Tomemos como ejemplo el triángulo anterior:

$$OA+OB+OC=0.$$

Y sabiendo que las coordenadas de un vector se calculan restando las coordenadas del vértice a las del origen obtenemos:

$$(A-O)+(B-O)+(C-O)=0.$$

Estas dos propiedades nos hacen pensar que el baricentro (valor central) está relacionado con propiedades de la media aritmética.

Volvamos a la estadística:

La media aritmética consiste en sumar todos los valores de un conjunto y dividir el resultado por el número de valores de los que disponemos. La media es el valor más representativo de una distribución, y cumple una propiedad: la suma de las diferencias de cada valor a la media es 0. Veámoslo con el siguiente ejemplo:

Media de los siguientes datos: 7, 8, 3, 2 y 9:

Sumamos todos ellos y el resultado lo dividimos entre el número de datos:

$$(7+8+3+2+9)/5= 5,8.$$

Propiedad de la media (similar a la del baricentro): Si a cada dato le restamos la media, la suma de dichos valores es 0:

$$(7-5,8)+(8-5,8)+(3-5,8)+(2-5,8)+(9-5,8)= 1,2+ 2,2-2,8-3,8+3,2=0.$$

En resumen, el baricentro es la media de los vértices y por ello, la suma de las diferencias de cada vértice al punto medio es 0, como ocurría en geometría.

Además, el baricentro es el centro de gravedad de la figura, el *valor central* de la misma. Inicialmente pensábamos que este valor central debería ser el punto (mediana de X,

mediana de Y) dado que, para el caso unidimensional, la mediana era el valor central de la distribución. Acabamos de comprobar que no es así, sino que las medianas en geometría pasan por la media aritmética de los vértices, y no por la “mediana estadística bidimensional” (mediana de X , mediana de Y).

Otro dato que parece confirmar nuestra preferencia por la media frente a la “mediana” como valor central es que, en estadística bidimensional, la recta de regresión pasa por el punto medio, es decir, el punto (media de X , media de Y).

Veámoslo en este ejemplo:

Hemos señalado trece puntos cualesquiera y hallado el punto medio: la coordenada X de este punto medio será la media de las 13 coordenadas X de los distintos puntos, y la coordenada Y será la media de las 13 coordenadas Y (Figura 6). Si ahora calculamos la recta de regresión de estos trece puntos, ésta pasa por dicho punto medio. Esto se cumple siempre por la ecuación de la recta de regresión.

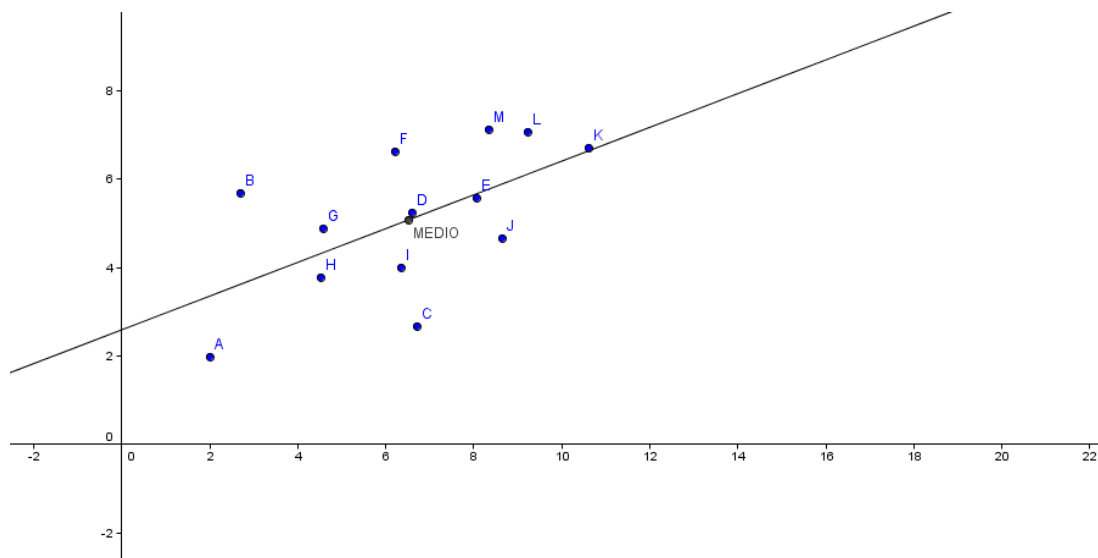


Figura 6: Recta de regresión en una nube de puntos

Fase 2: Aproximación a los centros geográficos

Después de haber indagado acerca de estos conceptos matemáticos y las relaciones que entre ellos existen, formulamos una nueva pregunta: ¿qué aplicaciones puede tener hallar la media, es decir, el valor central de un conjunto de puntos?

Hemos querido utilizar estos conceptos y cálculos para comprobar si, con ellos, podemos localizar un centro geográfico. Es decir, estudiar si el centro geográfico puede obtenerse de un modo *aproximado* utilizando el punto medio de un conjunto de puntos señalados en el mapa.

CENTRO GEOGRÁFICO

Según la bibliografía consultada, el centro geográfico de un área determinada es un concepto difícil de definir y de concretar. Vendría a ser el promedio de todos los puntos que forman la zona territorial. El *centroide* resultante que puede coincidir con el centro de masas, bien con el centro de gravedad.

Podemos dar las coordenadas de cualquier punto de la superficie terrestre respecto del meridiano de Greenwich y del Ecuador. Así, el meridiano actuaría como el eje de ordenadas (el de la Y) en un sistema de coordenadas, y el Ecuador como el eje de abscisas (el de la X) (Figura 7)

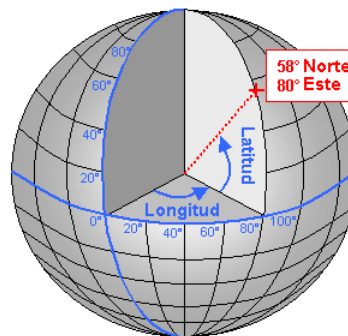


Figura 7: Representación de las coordenadas geográficas: (longitud, latitud)

Pero hay distinta terminología relativa a este “Centro geográfico”. El CENTRO MEDIO consiste en hacer la media de las coordenadas de los puntos considerados, sin embargo, para el cálculo del CENTRO MEDIO PONDERADO se tienen en cuenta ponderaciones de determinados puntos según los activos industriales, la población, etc. El proceso es complejo, pues hay que cuadricular la región en cuestión y determinar los puntos a los que se les va a aplicar la media. Además para hallar el CENTRO DE LA SUPERFICIE se hace un Centro medio ponderado asignándole a los puntos que están en el borde una ponderación diferente.

El procedimiento consistiría en trazar una cuadrícula sobre la zona en la que queremos calcular el centro geográfico, hallar las coordenadas de un punto de cada cuadrícula,

ponderar cada cuadrícula de acuerdo a la población, la actividad industrial... como ya hemos citado y calcular esa media ponderada. Debido a las irregularidades de los límites del mapa, todas las cuadrículas situadas en el perímetro del mismo tendrán un valor de ponderación de 0,5 frente al valor 1 de los puntos interiores... y el procedimiento se complica (Figura 8).

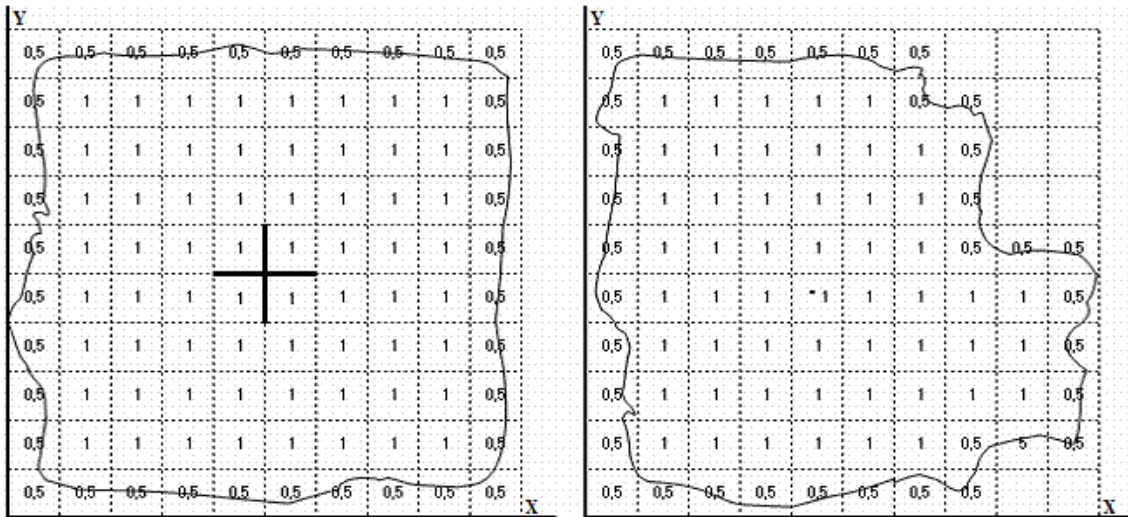


Figura 8: Ponderación utilizada para el contorno en los centros geográficos.

Nuestra aproximación para el cálculo de los centros geográficos

Como hemos visto en el apartado anterior, hablar de “valor central” es algo que depende de las consideraciones que se tengan en cuenta:

| | |
|-------------------------|--|
| Centro Medio | Media de los puntos seleccionados |
| Centro Medio ponderado | Media ponderada de los puntos seleccionados (densidad población, activos industriales, etc.) |
| Centro de la Superficie | Media ponderada dependiendo a partir de los puntos del perímetro. |

Nuestra aproximación al Centro geográfico será combinar estas tres opciones de la siguiente manera:

Primero seleccionaremos las capitales de provincia (para tener en cuenta, de un modo aproximado, la densidad de población, activos industriales, etc.)

Añadiremos puntos del contorno mediante un “muestreo equilibrado” (para considerar el centro de la superficie)

Haremos la media aritmética de las coordenadas de estos puntos (para hallar el “valor central”)

Con este procedimiento, ¿podríamos *aproximar* la localización de un centro geográfico mediante un método simple? Nuestra investigación ahora estaba centrada en lo siguiente: comprobar si, al calcular el punto medio de una serie de puntos de una zona geográfica escogidos como muestra, encontramos un punto cercano al que se considera el centro geográfico de dicha zona.

Como primera toma de datos, localizamos en páginas especializadas las coordenadas geográficas de las ocho provincias andaluzas y calculamos la media de dichos puntos utilizando la hoja de cálculo del Geogebra (Figura 9)

| | A | B | C | D | E | F |
|----|-------------|--------------|--------------|---|---|---|
| 1 | | Coordenada x | Coordenada y | | | |
| 2 | Almería | -2.28 | 36.5 | | | |
| 3 | Cádiz | -6.18 | 36.32 | | | |
| 4 | Córdoba | -4.47 | 37.53 | | | |
| 5 | Granada | -3.35 | 37.11 | | | |
| 6 | Huelva | -6.57 | 37.16 | | | |
| 7 | Jaén | -3.47 | 37.46 | | | |
| 8 | Málaga | -4.25 | 36.43 | | | |
| 9 | Sevilla | -5.59 | 37.23 | | | |
| 10 | Punto medio | -4.52 | 36.97 | | | |

Figura 9: Aproximación del *Centro Medio* de Andalucía utilizando las coordenadas geográficas.

Nuestro punto medio tiene coordenadas (36.97,-4.52) es decir 36,97N y 4,52O. Estas coordenadas, aproximadamente, corresponden con el municipio malagueño de Sierra de Yeguas, cercano a Antequera (de coordenadas 37.07N y 4.52O). Creemos no ir muy desencaminados, ya que hay geógrafos que consideran que el centro geográfico andaluz corresponde a Antequera (por sus comunicaciones con las provincias y otras consideraciones). Otros, sin embargo, opinan que se sitúa en la Sierra de Cabra, en Córdoba.

Elegir únicamente las capitales de provincia podría estar relacionado con los puntos que representan más densidad de población, pero para afinar más en nuestra aproximación al

Centro de la Superficie, consideramos que teníamos que tener en cuenta puntos del perímetro de la región. Estos puntos determinarían la muestra sobre la que haríamos los cálculos. ¿Cómo seleccionar la muestra?

Aquí es donde consideramos que puede estar el aporte de nuestro proyecto: lo que hemos llamado muestreo “equilibrado”.

Muestreo equilibrado

Nuestros datos son las coordenadas de los puntos seleccionados para hallar la media. El proceso de muestreo consiste en seleccionar los puntos de la región de la que queremos hallar el “centro”.

Para simplificar el problema utilicemos un caso sencillo. En la siguiente figura mostramos tres cuadrados en los que se han utilizado diferentes muestras de puntos en el perímetro para hallar el centro (Figura 10). El punto medio obtenido con nuestro procedimiento coincide tanto en el primero como en el tercer caso, pero se desplaza en el segundo ejemplo. Hemos mostrado la importancia del “muestreo equilibrado de puntos en el perímetro” para el cálculo del punto medio.

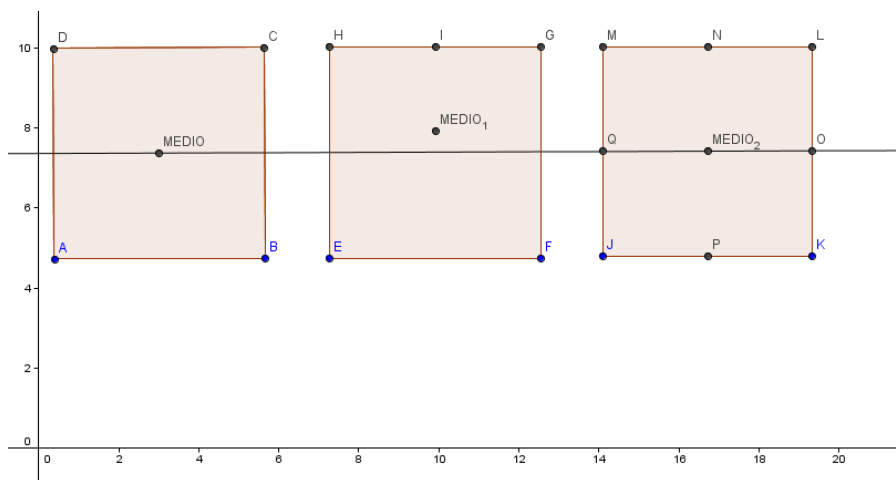


Figura 10: Cálculo del valor central a partir de puntos del contorno.

Concluimos que a la hora de calcular el punto medio de una región habrá que “equilibrar” los puntos del muestreo y escoger, en la medida de lo posible, un conjunto equitativo en los bordes. Notamos que cuando se escoge un punto más en uno de los lados, el punto

medio se verá desplazado con respecto a las otras dos figuras, que, con el mismo número de puntos por cada lado, coinciden en el punto medio.

Por otro lado, en algún caso práctico, cuantos más puntos se escojan para hallar el punto medio, más preciso y exacto será el resultado para la localización de un centro geográfico. Es importante aumentar el tamaño de la muestra.

Pasos previos: Aproximación al “centro” de Andalucía utilizando Geogebra

Antes de nuestro primer experimento con la España Peninsular, ponemos a prueba nuestras indagaciones haciendo cálculos acerca del “centro de Andalucía”.

Exportamos un mapa de España al programa Geogebra y situamos un punto sobre cada una de las capitales de provincia. Con estos primeros datos de la muestra estamos intentando tener en cuenta en el cálculo del centro geográfico lo relativo a la ponderación que le da más valor a aquellas poblaciones con mayor densidad, activos industriales, etc. (Figura 11)



Figura 11: Puntos localizados en las capitales de provincia de Andalucía. Geogebra.

A la vista de lo obtenido únicamente con las provincias (que se corresponde de un modo aproximado a lo obtenido con el cálculo a partir de las coordenadas de la Figura 8), decidimos aplicar nuestro muestreo “equilibrado”. SONDEAREMOS los puntos del perímetro. Cuantos más valores tomemos, desde luego, estaremos más próximos al valor exacto. En este caso, entran en la muestra no solo las ocho capitales de provincia, sino también puntos escogidos al azar en el contorno andaluz, pero siendo sistemáticos para “rellenar el contorno”. Las coordenadas de estos puntos son los DATOS que vamos a utilizar para calcular la media. Estas coordenadas son relativas a la imagen en Geogebra, luego tendremos que hallar su equivalencia en coordenadas geográficas buscándolas en el mapa.

Una vez determinados los puntos en el mapa, a partir de ellos, aplicamos la fórmula que nos da el valor central haciendo la media aritmética en cada coordenada. El resultado es el siguiente CENTRO que Geogebra nos representa y calcula en coordenadas (Figura 12)



Figura 12: Cálculo del valor central mediante el muestreo en el contorno.

Efectivamente, el punto señalado como “CENTRO” corresponde, *aproximadamente*, a la Sierra de Cabra, de coordenadas 37.28N y 4.26° que es el centro geográfico según algunas de las fuentes consultadas.

Experimento 1: Aproximación al “centro” de la España Peninsular utilizando Geogebra

Iniciamos nuestro experimento exportando un mapa político de España y teniendo en cuenta únicamente las capitales de provincia de la España peninsular. Hallamos el punto medio y, aproximadamente, corresponde al municipio madrileño de San Agustín, que estaría cercano a la provincia de Guadalajara, y tiene coordenadas 40.40N y 3.36O (Figura 13).

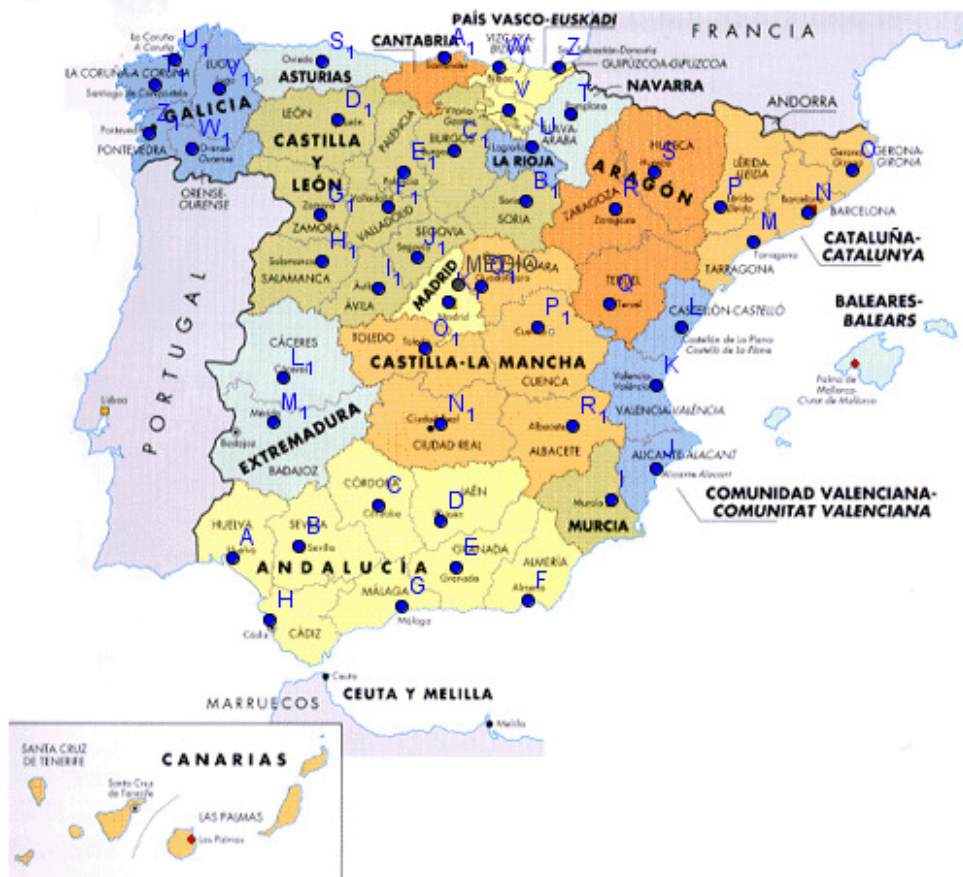


Figura 13: Aproximación al centro de la España Peninsular utilizando únicamente capitales de provincia.

Completamos estos datos, introduciendo, además de las capitales provinciales de la España peninsular, otros puntos del contorno “elegidos de un modo equilibrado”. Calculamos la media de estos puntos y obtenemos el punto mostrado en la Figura 14.

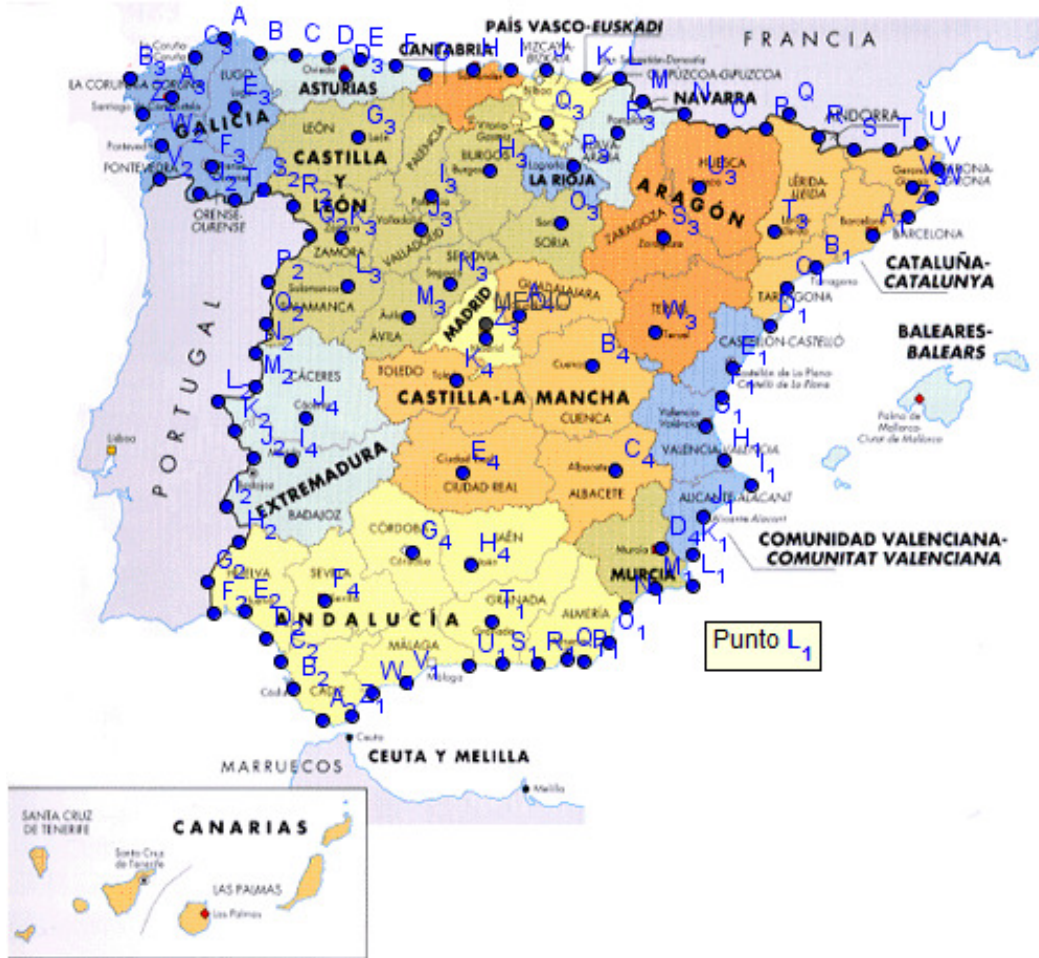


Figura 14: Valor central de España Peninsular utilizando capitales de provincia y muestreo en el contorno.

El punto medio hallado tiene por coordenadas en Geogebra (5.1, 7) (Datos en ANEXO). Situándolas en el mapa, el centro geográfico se encuentra al sur de la ciudad de Madrid, en la provincia con el mismo nombre, que tiene coordenadas 40.26N y 3.41°. Investigando posteriormente hemos averiguado que el centro geográfico español no se encuentra muy lejos, sino que está en el Cerro de los Ángeles, a unos 150m de la Cañada Real, al sur de la ciudad madrileña.

Como complemento a este cálculo, investigamos qué ocurre si no tenemos en cuenta la ponderación correspondiente a las capitales de provincia, estudiando el centro si solo tuviéramos en cuenta en el muestreo los puntos del contorno español (Datos en ANEXO).

El centro geográfico nos saldría desplazado hacia el suroeste de la Comunidad de Madrid, a unos 7 km del municipio de Villa del Prado, ya lindando con Toledo (Figura 15).



Figura 15: Centro de la España Peninsular utilizando únicamente puntos en el contorno.

Esto nos planteó una nueva pregunta: ¿Qué ocurre si tomamos otra muestra diferente de puntos en el contorno?

Experimento 2: Aproximación al “centro” de la España Peninsular utilizando Geogebra con un nuevo muestreo en el contorno

Para ver la dependencia de nuestro procedimiento respecto a la muestra seleccionada, nos planteamos este experimento con una nueva elección de puntos sobre el contorno de la España Peninsular, obteniendo el siguiente cálculo en el que se observa que el resultado obtenido es aproximadamente el mismo (Figura 16) (Datos en ANEXO).

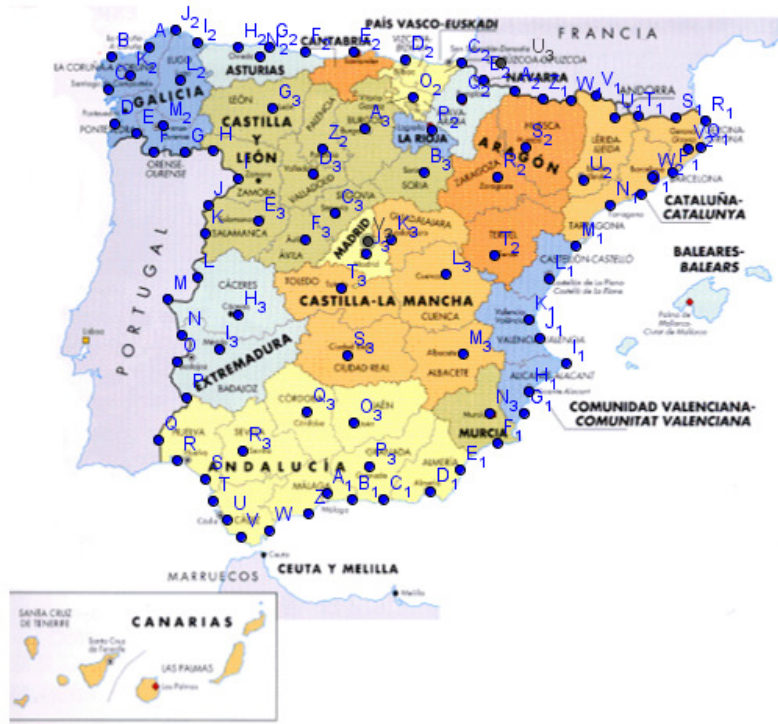


Figura 16: Valor central: elección de una muestra diferente en los puntos del contorno.

Y teniendo en cuenta únicamente el contorno, observamos que el valor central obtenido es prácticamente el mismo que en el muestreo anterior (Figura 17) (Datos en ANEXO).



Figura 17: Elección de puntos en el contorno en el segundo muestreo.

CONCLUSIONES

En relación a nuestros objetivos, hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- A) Hemos analizado la relación que existe entre la mediana desde un punto geométrico y estadístico.

En el plano, hemos establecido una relación entre el baricentro (centro de gravedad) y el cálculo de la media aritmética de los puntos del plano.

Para un conjunto de puntos en el plano, hemos analizado la relación entre la media aritmética y la “mediana de un conjunto de puntos” calculada como (Mediana de X, Mediana de Y), valorando que nos interesa más calcular el punto medio de un conjunto de puntos antes que el punto mediana, llamado así el punto obtenido como la mediana en cada coordenada. Por lo tanto, hemos averiguado que **el valor central de un conjunto de puntos en el plano es realmente la media, y no la “mediana”, como cabría esperar.**

- B) En nuestra investigación, los datos vienen dados por las coordenadas de los puntos seleccionados del plano para hallar su media aritmética. Partimos de los puntos que representan las capitales de provincia para tener en cuenta factores como la densidad de población, activos industriales, etc. A continuación añadimos un “muestreo equilibrado en el perímetro”, seleccionando los puntos que vayan “rellenando el contorno”. **Eligiendo distintas muestras el resultado varía pero no considerablemente.**

Hemos aplicado este resultado para *aproximar* la localización de centros geográficos: haciendo un muestreo y escogiendo distintos puntos sobre un mapa, hemos determinado que el centro geográfico de una zona concreta, aproximadamente corresponde al punto medio de todos los puntos señalados. Nuestro procedimiento, basado en la elección de muestras, simplifica el proceso original.

Además, ha sido curioso comprobar cómo no solo nos basta con los puntos del contorno de la zona, sino que algunos puntos han de escogerse en el interior de las mismas (las

capitales provinciales); y cómo conforme aumentábamos el número de datos, se obtenía el centro geográfico, a partir del punto medio, con más precisión.

Hemos comprobado que este mismo procedimiento es válido para calcular el centro geográfico de cualquier otra área.

CONTINUACIÓN DEL TRABAJO....

Pensamos que es posible mejorar el sistema con el que hemos modelado la ponderación. Por ejemplo, si una capital de provincia tiene el doble de población que otra de referencia, podemos añadir dos puntos en la mayor para calcular la media y así tener en cuenta este dato.

Podemos exportar los mapas a Geogebra para que las coordenadas geográficas coincidan con las coordenadas en la pantalla. De este modo los resultados obtenidos son más exactos y no es necesario volver a buscar el resultado en el mapa.

Podemos elegir los puntos del contorno de la región utilizando criterios más exactos. Por ejemplo localizando lugares significativos: cabos, ciudades importantes... o estableciendo una distancia entre dos de ellos.

Podemos aplicar nuestro procedimiento a más dimensiones. En nuestro proyecto, nos hemos centrado prácticamente en datos en el plano, pero, si calculásemos el punto medio de los vértices de un cuerpo cualquiera, estaríamos igualmente hallando su centro (Figura 18).

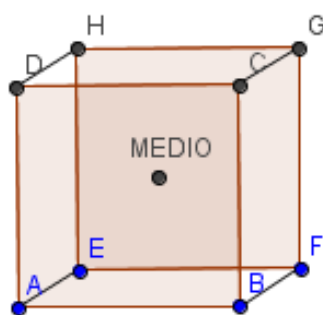


Figura 18: Valor central en un cubo hallando la media en las coordenadas tridimensionales.

BIBLIOGRAFÍA

Conceptos estadísticos y geométricos: Libros de texto de Matemáticas I y Aplicadas a CCSS I (Anaya y SM)

Coordenadas geográficas

<http://www.proteccioncivil.org/catalogo/carpeta02/carpeta24/vademecum12/vdm014.htm>

Coordenadas geográficas de Andalucía:

<http://www.juntadeandalucia.es/innovacioncienciayempresa/sigma/paginas/herramServGeo/herramientas.jsp>

Cálculo geográfico:

http://www.javiercolomo.com/index_archivos/Centro.htm

Centro geográfico andaluz:

<http://www.revistaestudiosregionales.com/pdfs/pdf407.pdf>

Centro geográfico España peninsular:

<http://www.cookingideas.es/centro-espana-20121018.html>

Recursos: Geogebra (Hoja de cálculo y vista gráfica)

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto EDU2012-37259 “Análisis de procesos de aprendizaje de alumnos de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas” subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

ANEXOS: DATOS UTILIZADOS

NOTA: Los datos que aparecen son coordenadas de los puntos seleccionados en las imágenes exportadas en Geogebra, por lo que no se corresponden con coordenadas geográficas. Además el Sondeo 2 se hizo con una ubicación del mapa en una localización diferente para comprobar la independencia de las escalas, por lo que, aunque los puntos medios sean diferentes, su ubicación real en el mapa es muy similar a la del Sondeo 1.

Experimento 1: Datos de las coordenadas de las capitales de provincia y de los puntos del contorno (Figura 14)

| | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ● A = (2.6, 9.72) | ● F ₂ = (2.5, 4.24) | ● K ₄ = (3.76, 9.38) | ● R ₂ = (3.26, 8.12) |
| ● A ₁ = (8.8, 7.84) | ● F ₃ = (4.58, 8.24) | ● L = (6.38, 9.34) | ● R ₃ = (7.22, 8.28) |
| ● A ₂ = (3.54, 3.22) | ● F ₄ = (3.38, 6.12) | ● L ₁ = (7.08, 4.5) | ● S = (8.62, 8.66) |
| ● A ₃ = (2.7, 9.1) | ● G = (4.52, 9.38) | ● L ₂ = (2.54, 6.26) | ● S ₁ = (5.26, 3.76) |
| ● A ₄ = (6.14, 6.62) | ● G ₁ = (7.2, 6.02) | ● L ₃ = (5.86, 7.98) | ● S ₂ = (2.98, 8.28) |
| ● B = (2.94, 9.58) | ● G ₂ = (2.44, 4.54) | ● M = (6.6, 9.12) | ● S ₃ = (6.76, 6.88) |
| ● B ₁ = (8.26, 7.54) | ● G ₃ = (4.46, 7.86) | ● MEDIO = (5.1, 7) | ● T = (8.96, 8.66) |
| ● B ₂ = (3.26, 3.52) | ● G ₄ = (3.28, 5.68) | ● M ₁ = (6.72, 4.48) | ● T ₁ = (2.08, 9.18) |
| ● B ₃ = (1.7, 9.34) | ● H = (4.98, 9.42) | ● M ₂ = (2.9, 6.4) | ● T ₂ = (2.7, 8.18) |
| ● B ₄ = (6.36, 5.66) | ● H ₁ = (7.38, 5.7) | ● M ₃ = (5.16, 8.42) | ● T ₃ = (7.86, 7.88) |
| ● C = (3.28, 9.56) | ● H ₂ = (2.74, 4.92) | ● N = (7, 9) | ● U = (9.26, 8.72) |
| ● C ₁ = (7.98, 7.34) | ● H ₃ = (3.76, 7.82) | ● N ₁ = (6.44, 4.3) | ● U ₁ = (4.94, 3.74) |
| ● C ₂ = (3.14, 3.78) | ● H ₄ = (3.56, 4.4) | ● N ₂ = (2.9, 6.72) | ● U ₂ = (2.36, 8.24) |
| ● C ₃ = (2.32, 9.54) | ● I = (5.34, 9.42) | ● N ₃ = (5.7, 8.9) | ● U ₃ = (5.42, 7.08) |
| ● C ₄ = (4.92, 4.72) | ● I ₁ = (7.64, 5.46) | ● O = (7.36, 8.84) | ● V = (9.42, 8.48) |
| ● D = (3.6, 9.54) | ● I ₂ = (2.62, 5.26) | ● O ₁ = (6.28, 3.96) | ● V ₁ = (4.34, 3.58) |
| ● D ₁ = (7.82, 6.98) | ● I ₃ = (3.8, 7.34) | ● O ₂ = (3, 7) | ● V ₂ = (1.98, 8.38) |
| ● D ₂ = (3, 4) | ● I ₄ = (4.34, 4.84) | ● O ₃ = (5.96, 8.54) | ● V ₃ = (9.12, 8.36) |
| ● D ₃ = (2.44, 8.54) | ● J = (5.68, 9.42) | ● P = (7.78, 8.86) | ● W = (9.36, 8.2) |
| ● D ₄ = (6.78, 4.86) | ● J ₁ = (7.18, 5.16) | ● P ₁ = (6.04, 3.78) | ● W ₁ = (4.02, 3.48) |
| ● E = (3.9, 9.52) | ● J ₂ = (2.88, 5.72) | ● P ₂ = (3.02, 7.4) | ● W ₂ = (2, 8.7) |
| ● E ₁ = (7.46, 6.58) | ● J ₃ = (4.34, 7.06) | ● P ₃ = (6.36, 8.84) | ● W ₃ = (5.12, 6.86) |
| ● E ₂ = (2.8, 4.26) | ● J ₄ = (5.14, 4.16) | ● Q = (8, 9) | ● Z = (9.14, 8.02) |
| ● E ₃ = (3.9, 8.78) | ● K = (6.08, 9.34) | ● Q ₁ = (5.88, 3.8) | ● Z ₁ = (3.82, 3.26) |
| ● E ₄ = (4.88, 5.64) | ● K ₁ = (7.08, 4.8) | ● Q ₂ = (3.42, 7.84) | ● Z ₂ = (1.82, 9) |
| ● F = (4.24, 9.46) | ● K ₂ = (2.7, 5.98) | ● Q ₃ = (6.78, 7.88) | ● Z ₃ = (4.8, 6.42) |
| ● F ₁ = (7.36, 6.3) | ● K ₃ = (4.72, 7.36) | ● R = (8.28, 8.78) | |
| | | ● R ₁ = (5.6, 3.76) | |

Experimento 1: Valor medio (España Peninsular) utilizando únicamente puntos del contorno (Figura 15)

| | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ● A = (2.6, 9.72) | ● I = (5.34, 9.42) | ● R = (8.28, 8.78) |
| ● A ₁ = (8.8, 7.84) | ● I ₁ = (7.64, 5.46) | ● R ₁ = (5.6, 3.76) |
| ● A ₂ = (3.54, 3.22) | ● I ₂ = (2.62, 5.26) | ● R ₂ = (3.26, 8.12) |
| ● B = (2.94, 9.58) | ● J = (5.68, 9.42) | ● S = (8.62, 8.66) |
| ● B ₁ = (8.26, 7.54) | ● J ₁ = (7.18, 5.16) | ● S ₁ = (5.26, 3.76) |
| ● B ₂ = (3.26, 3.52) | ● J ₂ = (2.88, 5.72) | ● S ₂ = (2.98, 8.28) |
| ● B ₃ = (1.7, 9.34) | ● K = (6.08, 9.34) | ● T = (8.96, 8.66) |
| ● C = (3.28, 9.56) | ● K ₁ = (7.08, 4.8) | ● T ₂ = (2.7, 8.18) |
| ● C ₁ = (7.98, 7.34) | ● K ₂ = (2.7, 5.98) | ● U = (9.26, 8.72) |
| ● C ₂ = (3.14, 3.78) | ● L = (6.38, 9.34) | ● U ₁ = (4.94, 3.74) |
| ● C ₃ = (2.32, 9.54) | ● L ₁ = (7.08, 4.5) | ● U ₂ = (2.36, 8.24) |
| ● D = (3.6, 9.54) | ● L ₂ = (2.54, 6.26) | ● V = (9.42, 8.48) |
| ● D ₁ = (7.82, 6.98) | ● M = (6.6, 9.12) | ● V ₁ = (4.34, 3.58) |
| ● D ₂ = (3, 4) | ● MEDIO = (5.21, 6.88) | ● V ₂ = (1.98, 8.38) |
| ● D ₄ = (6.78, 4.86) | ● M ₁ = (6.72, 4.48) | ● V ₃ = (9.18, 8.3) |
| ● E = (3.9, 9.52) | ● M ₂ = (2.9, 6.4) | ● W = (9.36, 8.2) |
| ● E ₁ = (7.46, 6.58) | ● N = (7, 9) | ● W ₁ = (4.02, 3.48) |
| ● E ₂ = (2.8, 4.26) | ● N ₁ = (6.44, 4.3) | ● W ₂ = (2, 8.7) |
| ● F = (4.24, 9.46) | ● N ₂ = (2.9, 6.72) | ● Z = (9.14, 8.02) |
| ● F ₁ = (7.36, 6.3) | ● O = (7.36, 8.84) | ● Z ₁ = (3.82, 3.26) |
| ● F ₂ = (2.5, 4.24) | ● O ₁ = (6.28, 3.96) | ● Z ₂ = (1.82, 9) |
| ● G = (4.52, 9.38) | ● O ₂ = (3, 7) | |
| ● G ₁ = (7.2, 6.02) | ● P = (7.78, 8.86) | |
| ● G ₂ = (2.44, 4.54) | ● P ₁ = (6.04, 3.78) | |
| ● H = (4.98, 9.42) | ● P ₂ = (3.02, 7.4) | |
| ● H ₁ = (7.38, 5.7) | ● Q = (8, 9) | |
| ● H ₂ = (2.74, 4.92) | ● Q ₁ = (5.88, 3.8) | |
| | ● Q ₂ = (3.42, 7.84) | |

Experimento 2: Datos de las coordenadas de las capitales de provincia y de los puntos del contorno

(Figura 16)

| | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------------|
| ● $A = (0.4, 1.6)$ | ● $G_3 = (0.67, 1.45)$ | ● $N_3 = (0.6, 1)$ | ● $U_2 = (1.18, 1.14)$ |
| ● $A_1 = (0.8, 0.6)$ | ● $H = (0.54, 1.37)$ | ● $O = (0.46, 0.89)$ | ● $U_3 = (1.61, 1.37)$ |
| ● $A_2 = (1.22, 1.5)$ | ● $H_1 = (1.25, 0.83)$ | ● $O_1 = (1.51, 1.27)$ | ● $V = (0.61, 0.5)$ |
| ● $A_3 = (0.79, 1.37)$ | ● $H_2 = (0.6, 1.6)$ | ● $O_2 = (0.65, 1.58)$ | ● $V_1 = (1.41, 1.49)$ |
| ● $B = (0.32, 1.58)$ | ● $H_3 = (0.95, 1.17)$ | ● $O_3 = (0.56, 0.91)$ | ● $V_2 = (1.38, 1.31)$ |
| ● $B_1 = (0.86, 0.58)$ | ● $I = (0.6, 1.3)$ | ● $P = (0.48, 0.81)$ | ● $V_3 = (0.89, 1.14)$ |
| ● $B_2 = (1.15, 1.52)$ | ● $I_1 = (1.34, 0.89)$ | ● $P_1 = (1.58, 1.32)$ | ● $W = (0.67, 0.51)$ |
| ● $B_3 = (0.77, 1.3)$ | ● $I_2 = (0.51, 1.61)$ | ● $P_2 = (0.99, 1.49)$ | ● $W_1 = (1.35, 1.48)$ |
| ● $C = (0.31, 1.5)$ | ● $I_3 = (0.85, 0.91)$ | ● $P_3 = (0.61, 0.69)$ | ● $W_2 = (1.02, 1.32)$ |
| ● $C_1 = (0.93, 0.58)$ | ● $J = (0.53, 1.24)$ | ● $Q = (0.42, 0.72)$ | ● $Z = (0.76, 0.55)$ |
| ● $C_2 = (1.1, 1.56)$ | ● $J_1 = (1.28, 0.95)$ | ● $Q_1 = (1.64, 1.37)$ | ● $Z_1 = (1.29, 1.48)$ |
| ● $C_3 = (0.8, 1.2)$ | ● $J_2 = (0.46, 1.64)$ | ● $Q_2 = (1.11, 1.48)$ | ● $Z_2 = (0.89, 1.42)$ |
| ● $D = (0.32, 1.43)$ | ● $J_3 = (0.83, 1.05)$ | ● $Q_3 = (0.75, 0.77)$ | ● MEDIO = (0.88, 1.17) |
| ● $D_1 = (1.03, 0.6)$ | ● $K = (0.53, 1.18)$ | ● $R = (0.46, 0.67)$ | |
| ● $D_2 = (0.98, 1.57)$ | ● $K_1 = (1.25, 0.99)$ | ● $R_1 = (1.65, 1.43)$ | |
| ● $D_3 = (0.75, 1.16)$ | ● $K_2 = (0.47, 1.52)$ | ● $R_2 = (1.03, 1.42)$ | |
| ● $E = (0.37, 1.41)$ | ● $K_3 = (1.06, 1.08)$ | ● $R_3 = (0.86, 0.75)$ | |
| ● $E_1 = (1.1, 0.65)$ | ● $L = (0.51, 1.08)$ | ● $S = (0.53, 0.63)$ | |
| ● $E_2 = (0.86, 1.59)$ | ● $L_1 = (1.3, 1.08)$ | ● $S_1 = (1.58, 1.44)$ | |
| ● $E_3 = (0.65, 1.29)$ | ● $L_2 = (0.35, 1.53)$ | ● $S_2 = (1.18, 1.31)$ | |
| ● $F = (0.41, 1.36)$ | ● $L_3 = (1.11, 0.91)$ | ● $S_3 = (0.89, 0.65)$ | |
| ● $F_1 = (1.18, 0.71)$ | ● $M = (0.44, 1.03)$ | ● $T = (0.54, 0.58)$ | |
| ● $F_2 = (0.75, 1.59)$ | ● $M_1 = (1.36, 1.15)$ | ● $T_1 = (1.5, 1.44)$ | |
| ● $F_3 = (0.65, 1.21)$ | ● $M_2 = (0.43, 1.42)$ | ● $T_2 = (1.25, 1.37)$ | |
| ● $G = (0.48, 1.36)$ | ● $M_3 = (1.17, 0.78)$ | ● $T_3 = (1.54, 1.31)$ | |
| ● $G_1 = (1.24, 0.78)$ | ● $N = (0.47, 0.95)$ | ● $U = (0.58, 0.54)$ | |
| ● $G_2 = (0.67, 1.6)$ | ● $N_1 = (1.44, 1.24)$ | ● $U_1 = (1.45, 1.44)$ | |
| | ● $N_2 = (0.35, 1.47)$ | | |

Experimento 2: Valor medio utilizando únicamente puntos del contorno (Figura 17)

| | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ● A = (0.4, 1.6) | ● J = (0.53, 1.24) | ● Z = (0.76, 0.55) |
| ● A ₁ = (0.8, 0.6) | ● J ₁ = (1.28, 0.95) | ● Z ₁ = (1.29, 1.48) |
| ● A ₂ = (1.22, 1.5) | ● J ₂ = (0.46, 1.64) | |
| ● B = (0.32, 1.58) | ● K = (0.53, 1.18) | |
| ● B ₁ = (0.86, 0.58) | ● K ₁ = (1.25, 0.99) | |
| ● B ₂ = (1.15, 1.52) | ● L = (0.51, 1.08) | |
| ● C = (0.31, 1.5) | ● L ₁ = (1.3, 1.08) | |
| ● C ₁ = (0.93, 0.58) | ● M = (0.44, 1.03) | |
| ● C ₂ = (1.1, 1.56) | ● MEDIO = (0.86, 1.13) | |
| ● D = (0.32, 1.43) | ● M ₁ = (1.36, 1.15) | |
| ● D ₁ = (1.03, 0.6) | ● N = (0.47, 0.95) | |
| ● D ₂ = (0.98, 1.57) | ● N ₁ = (1.44, 1.24) | |
| ● E = (0.37, 1.41) | ● O = (0.46, 0.89) | |
| ● E ₁ = (1.1, 0.65) | ● O ₁ = (1.51, 1.27) | |
| ● E ₂ = (0.86, 1.59) | ● P = (0.48, 0.81) | |
| ● F = (0.41, 1.36) | ● P ₁ = (1.58, 1.32) | |
| ● F ₁ = (1.18, 0.71) | ● Q = (0.42, 0.72) | |
| ● F ₂ = (0.75, 1.59) | ● Q ₁ = (1.64, 1.37) | |
| ● G = (0.48, 1.36) | ● R = (0.46, 0.67) | |
| ● G ₁ = (1.24, 0.78) | ● R ₁ = (1.65, 1.43) | |
| ● G ₂ = (0.67, 1.6) | ● S = (0.53, 0.63) | |
| ● H = (0.54, 1.37) | ● S ₁ = (1.58, 1.44) | |
| ● H ₁ = (1.25, 0.83) | ● T = (0.54, 0.58) | |
| ● H ₂ = (0.6, 1.6) | ● T ₁ = (1.5, 1.44) | |
| ● I = (0.6, 1.3) | ● U = (0.58, 0.54) | |
| ● I ₁ = (1.34, 0.89) | ● U ₁ = (1.45, 1.44) | |
| ● I ₂ = (0.51, 1.61) | ● V = (0.61, 0.5) | |
| | ● V ₁ = (1.41, 1.49) | |
| | ● W = (0.67, 0.51) | |
| | ● W ₁ = (1.35, 1.48) | |